

時刻暦応答に伴う疲労強度を最大化する最適設計法の構築

東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻 助教 小川 竣

1. はじめに

建築や土木構造物では地震発生に伴う大きな振動負荷が発生する。さらに、ロケットエンジン、ガスタービンなど機械製品では、実機稼働中に生じる応力変動による疲労が損傷の主な要因である。そのため、構造物の疲労強度が必ず強度設計指針として考慮される。一方で、実設計では、軽量化と構造強度などトレードオフの関係にある設計要求を同時に満たす設計案の導出が求められる。また、構造物の地震応答や機械製品では、稼働開始から定格運転、停止に至るまでに時々刻々負荷条件が変化する時間依存の問題となるため、物理現象の評価が困難である。その結果、従来の設計者の勘や経験則に基づく設計手法のみでは、全ての設計要求を満たす最適構造の導出ができない、もしくは導出までに必要な開発期間の長期化といった課題がある。

こうした課題に対し、物理モデルと数理的最適化アルゴリズムを組み合わせ、要求仕様を満たす構造を自動で導出できるトポロジー最適化の設計適用が注目されている。トポロジー最適化は、物体の穴の配置や数、外形状の全てを自由に変更できる高い設計自由度を有する手法である。これまで、機械構造物の軽量化だけでなく、伝熱性能や流体性能、構造強度の向上を扱う手法が広く研究されてきた。しかし、先行研究[1]の多くは静的な構造問題を対象としたものが大半である。構造物の強度設計で最も重要な疲労強度を考慮した手法[2, 3]も静的問題のみの考慮に留まっており、地震応答や衝突など過渡的に変化する応答を考慮できない。そのため、トポロジー最適化の設計適用範囲を広げるため、運動方程式を考慮し、時間的に変化する任意の荷重条件や荷重の作用する速さなど任意の条件に対応できる時刻暦応答問題への拡張が必要である。

本研究では、時刻暦応答問題に基づく疲労強度最大化問題のトポロジー最適化手法を提案する。まず、トポロジー最適化で取り扱う設計問題の定義を行う。目的関数として、疲労強度評価で一般に用いられるレインフロー法[4]による累積疲労損傷度[2]を適用した。この目的関数の最小化によって疲労強度の高い構造形態の導出ができる。次に、最適構造の探索に必要な設計変数に対する目的関数の勾配情報が必要になる。この操作は一般に感度解析と呼ばれる。時刻暦応答問題は静的問題に比べて感度解析が複雑化[5]することが知られており、多くの研究では、その定式化に関する議論が中心だった。さらに、レインフロー法による累積疲労損傷度を考慮するとさらに感度解析が困難になる。そこで、本研究では、自動微分[6]と呼ばれる微分連鎖律を組み合わせ、アルゴリズム的に勾配を計算する方法を採用し、直接的な感度解析を回避した。最後に、数値計算例として、自動微分による感度解析の精度検証とトポロジー最適化計算例を示し、提案手法の有効性を示す。

2. 設計問題

トポロジー最適化では、物体表面を直接定義することで構造形態を表現するのではなく、固定設計領域と呼ばれる空間を定義し、内部の仮想的な材料分布の配置によって構造形態を表現する。そこで、ある位置 $\mathbf{x}$ における仮想的な多孔質材料の充填率を設計変数 s とする。そのため、設計変数 s は以下の条件を持つ。

$$0 \leq s \leq 1 \quad (1)$$

なお、式(1)を直接用いたトポロジー最適化では、チェッカーボードパターンと呼ばれる不安定な構造や製造性の乏しい複雑な構造が得られることが知られている。そこで、周囲の設計変数による平均化処理を適用した密度フィルターを適用する。フィルタリングされた設計変数は $\tilde{s}(\mathbf{x})$ とする。このフィルタリングされた設計変数が $\tilde{s}(\mathbf{x}) = 1$ であればその位置は固体、 $\tilde{s}(\mathbf{x}) = 0$ であれば空隙、 $0 < \tilde{s}(\mathbf{x}) < 1$ であれば固体と空隙の中間構造を表す。

本研究では、材料モデルとして等方性の線形弾性体を扱うため、必要な材料パラメータである要素 e におけるヤング率 E_e と質量密度 ρ_e を以下のようにフィルタリングされた設計変数 $\tilde{s}_e$ の関数とみなす。

$$E_e(\tilde{s}_e) = E_0 + (E_m - E_0) \tilde{s}_e^3 \quad (2)$$

$$\rho_e(\tilde{s}_e) = \rho_m \tilde{s}_e \quad (3)$$

E_m と ρ_m は固体のヤング率と質量密度である。ヤング率のみフィルタリングされた設計変数の3乗を与えることで、中間密度領域に対してペナルティーを与え、固体または空隙のどちらかに収束させることができる。また、 E_0 は空隙領域に設定されたヤング率である。空隙はヤング率を持たないが、固定設計領域を考慮したトポロジー最適化では、空隙領域にも解析要素が存在するため、すべての要素に何かしらのヤング率を与える必要がある。そこで、解析を実行するため解析結果に影響が出ない微小な値を設定した。

時刻暦応答における累積疲労損傷評価に必要な応力分布を求めるため、支配方程式は運動方程式を扱う。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (4)$$

FEM 解析を想定し、 $\mathbf{M}$ は全体質量行列、 $\mathbf{K}$ は全体剛性行列、 $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ は外力ベクトルである。さらに、 $\mathbf{a}$ は加速度ベクトル、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトルである。時間方向の離散化は、ニューマーカの β 法を適用し、時間ステップ i における加速度ベクトル $\mathbf{a}_i$ と速度ベクトル $\mathbf{v}_i$ について以下の近似式を導入し、運動方程式を解く。

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{v}_{i-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_{i-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{v}_{i-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \mathbf{a}_{i-1} \quad (6)$$

よって、式(5)と式(6)を式(4)に代入し、時間方向に離散化された運動方程式が得られる。

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) + \mathbf{K} \mathbf{u}_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} \mathbf{v}_{i-1} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} \mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (7)$$

以上を踏まえて、本研究で扱う設計問題をまとめると以下となる。

$$P \left\{ \begin{array}{l} \min_s f(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_n, \dots, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_0) = \frac{f_1}{f_1^0} + w \sum_{e=1}^{N_{\text{ele}}} 4\tilde{s}_e(1 - \tilde{s}_e)v_e \\ \text{subject to} \left\{ \begin{array}{l} g(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) = \sum_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \tilde{s}_e v_e - V_{\text{lim}} \leq 0 \\ \mathbf{R}_i(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i-1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}) = \mathbf{0} \\ 0 \leq s \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8)$$

f は目的関数であり、 f_1 は累積疲労損傷度に基づく評価関数、 f_1^0 は最適化初期ステップの f_1 である。評価関数 f_1 の詳細は3章に示す。目的関数の2項目は、グレースケールに対するペナルティー項である。 w はペナルティー項の重みであり、重みを大きくするとグレースケールを減らそうとする方向に最適化を進めることができる。 N_{ele} は総要素数、 v_e は要素 e の体積である。 g は制約関数であり、本研究では体積制約を与えた。 V_{lim} は固定設計領域内で使用できる体積の上限値である。この上限値は構造物の軽量化に関する条件であり、小さい値を設定すれば、少ない材料の量で最も累積疲労損傷度の小さい構造を導出できる。得られた構造において、累積疲労損傷度が1.0以下であれば、考慮した荷重条件で、疲労強度を満たす構造であるとみなすことができる。

3. レインフロー法を用いた累積疲労損傷評価関数

疲労損傷評価では、変動応力における平均応力 σ_m と応力振幅 σ_a の大きさが影響する。しかし、一般には、応力の発生大きさや発生周期が時時刻々変化する。そういった任意の状況において、平均応力と応力振幅の評価を行うため、レインフロー法を適用する。レインフロー法は、変動荷重による応力の時間変化を建築物の屋根とみなし、屋根を流れる水

の経路を考え、その雨だれの経路から、疲労寿命に寄与する応力振幅とその繰返し数を決定するものである。この方法により、疲労損傷評価に必要な平均応力と応力振幅を解析結果から算出した。以降はトポロジー最適化における目的関数の導出を行う。

まず、時刻 t において、運動方程式を解いて得た要素 e の応力 $\sigma_e(t)$ を算出し、設計変数によって緩和[5]された以下の応力を求める。

$$\hat{\sigma}_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{s_e^{0.5}} \quad (9)$$

設計変数によって緩和することで、固定設計領域における空隙部の特異現象を回避できる。次に式(9)の緩和された応力 $\hat{\sigma}_e(t)$ に対し、方向をもつ von Mises 応力 $\tilde{\sigma}_e^{vM}(t)$ を求める。

$$\tilde{\sigma}_e^{vM}(t) = \text{sign}(\sigma_e^H(t))\sigma_e^{vM}(t) \quad (10)$$

ここで、 $\sigma_e^H(t)$ は時刻 t における要素 e の静水圧成分である。この静水圧成分をsign関数に適用すると、変動応力の正負の情報が与えられる。この方向をもつ von Mises 応力を通常のレインフロー法に適用し、疲労評価に必要な要素 e の周期 i における平均応力 σ_e^{mi} と応力振幅 σ_e^{ai} を得る。さらに、平均応力が疲労寿命に与える影響を考慮するため、Morrow の平均応力法を適用する。

$$\sigma_e^{ar_i} = \sigma_e^{ai} \left(1 - \frac{\sigma_e^{mi}}{\sigma_f'} \right)^{-1} \quad (11)$$

σ_f' は材料強度係数である。また、バスキンの式を用いてある応力状態における許容繰返し回数 N_e^{fi} を次式で定義する。

$$N_e^{fi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_e^{ar_i}}{\sigma_f'} \right)^{1/b} \quad (12)$$

b は、強度特性を表す負の値を持つ材料パラメータである。次に、Palmgren–Miner 則を考慮し、要素 e の累積疲労損傷係数 D_e が得られる。

$$D_e = \sum_{i=1}^{N^r} \frac{n_i}{N_e^{fi}} \quad (13)$$

n_i と N^r はレインフロー法から得られるある応力レベルの発生回数と総サイクル数である。

式(13)によって固定設計領域における累積疲労損傷係数が得られたが、トポロジー最適化では、目的関数はスカラー値として定義する必要がある。そこで、 L_p ノルムを用いて固定設計領域中の最大累積疲労損傷度の最大値を近似する。

$$D_{max} \approx \left[\sum_{e=1}^{N_{ele}} D_e^P \right]^{1/P} \quad (14)$$

P は L_p ノルムのパラメータであり、数学的には無限大とすることで、評価対象の最大値に一致することが知られている。しかし、数値解析上は、有限の値しか設定できないため、本研究では $P = 10$ と大きな値を設定した。式(14)を目的関数とし、この関数を最小化することで、最大累積疲労損傷度を最小化する構造が得られる。最大累積疲労損傷度の最小化は作用荷重によって物体中で最も損傷しやすい部分の改善に繋がり、疲労強度の向上に一致する。なお、式(14)を直接目的関数とすると、最適化の収束計算中に関数値が大きくなり変化する、最適化計算が不安定化することが知られている。そのため、次式を目的関数とした。

$$f_1 = (D_e^{-b})_{max} \approx \left[\sum_{e=1}^{N_{ele}} (D_e^{-b})^P \right]^{1/P} \quad (15)$$

式(15)を用いることで、目的関数のオーダーがスケーリングされ、トポロジー最適化の収束計算が安定化する。

4. 自動微分による感度解析

トポロジー最適化では、設計変数 s に対する目的関数の勾配 $\partial f / \partial s_e$ を計算する必要がある。先行研究をはじめ、一般には、随伴法に基づく定式化によって感度解析がなされる。しかし、式(8)が示すように、本研究で扱う目的関数は、最終時間ステップ n に至るまでのすべての時間ステップの状態変数 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ に依存する複雑な関数であり、数式操作における直接的な定式化は困難である。

そこで、本研究では、別の方法として、自動微分による感度解析を新たに適用した。自動微分は、関数の計算グラフを作成、各種演算を簡単に微分できる程度まで細かく分解する。そして、その計算グラフに沿って微分連鎖律を繰り返すことで、最終的な微分値の計算を行う方法である。理論上、関数の計算プログラムさえ作成すれば、任意の関数、物理モデルに関する感度解析ができる高い汎用性を有する。この手法は、随伴法のように直接的な数式操作による定式化が不要であり、アルゴリズム的に自動で感度の値が計算できる。

図1に目的関数の計算フローを示す。図1において、色をつけた項目は自動微分の適用範囲である。目的関数の計算過程において、設計変数が関係するすべての範囲を自動微分

に含む必要がある。そのため、設計変数に対するフィルタリング、運動方程式を解く操作だけでなく、レインフロー法による応力範囲、平均応力の整理まですべて自動微分の対象にする必要がある。なお、レインフロー法の計算では、条件分岐が含まれるが、自動微分では、条件分岐に対応する計算グラフを作成するため、微分計算が可能である。

自動微分は、プログラム自体を解析するため、自動微分のライブラリに対応した計算プログラムを用意する必要があるという欠点がある。レインフロー法は MATLAB など一般にライブラリ化されているが、本研究で使用した自動微分ライブラリはプログラミング言語 Julia を想定しているため、新たにレインフロー法のライブラリを自作した。

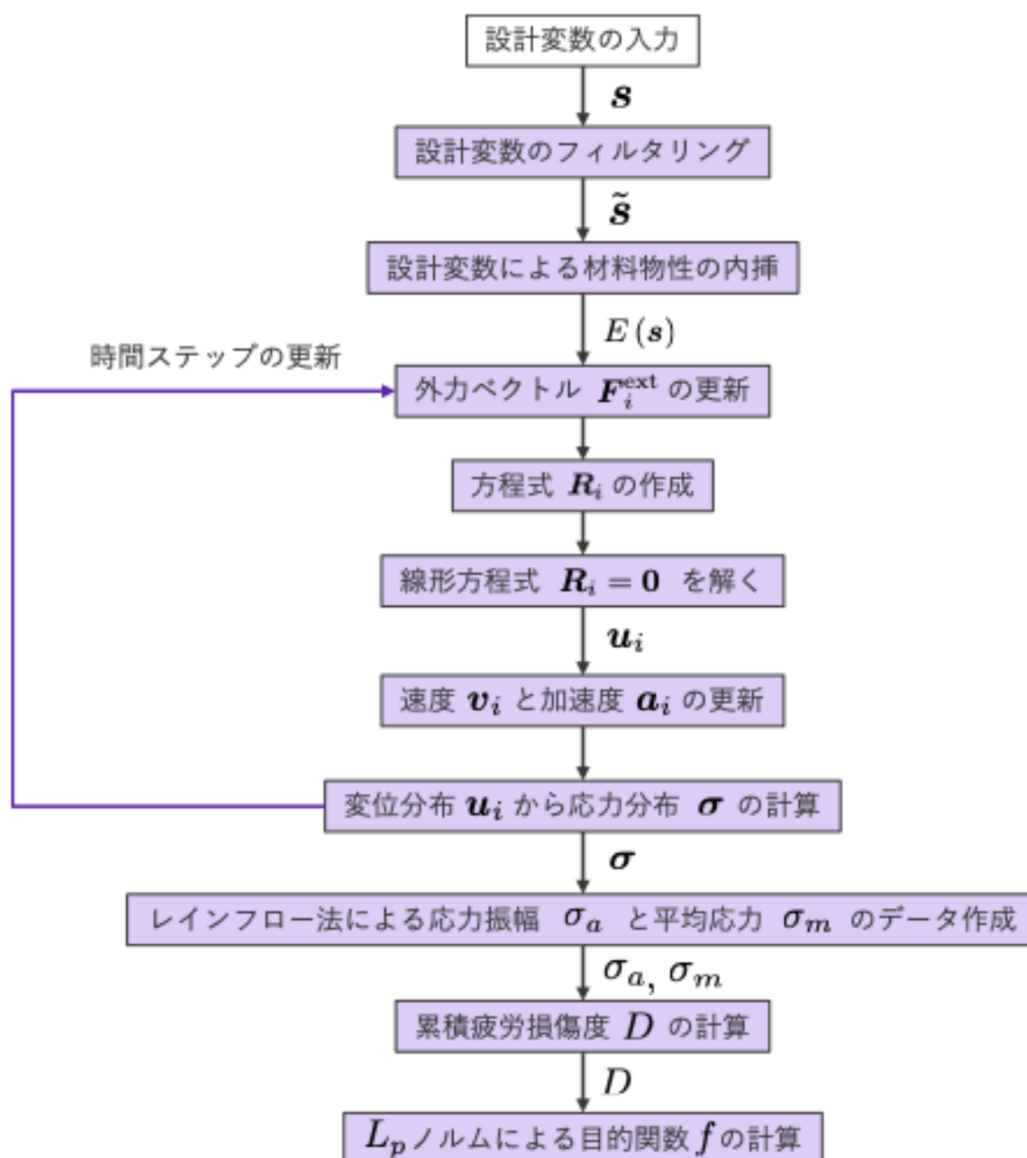


図1 提案する目的関数の計算フロー

5. 感度解析の精度検証

式(8)の複雑な目的関数に対して、自動微分によって正確な感度解析ができるかを検討した。ここでは、別の任意の関数について感度解析ができる数値微分による感度分布と比較することで自動微分による感度解析の精度を確認する。本研究では、中央差分を適用した数値微分を採用した。数値微分は、任意の関数について微分計算が可能であるが、設計変数の数が多いと膨大な計算コストが発生することが知られている。トポロジー最適化では、設計変数の数が FEM の要素の数と一致するため、計算コストの観点から実用的ではない。そこで、精度検証用のベンチマークとして使用される。

検討における解析モデルと境界条件を図 2 (a)に示す。要素分割数は $5 \times 10 = 50$ 要素とした。境界条件は底面を完全固定、上面全面に右向きを正とし時間に依存して作用方向が変化する等分布荷重を与えた。等分布荷重の作用履歴は、簡単のため、以下の式を適用した。

$$\bar{t}_i^x = A \exp(\alpha i) \sin(\omega i), \quad \omega = 2\pi i/n \quad (16)$$

ここで、 A は基準となる荷重の振幅を表すパラメータ、 α は荷重の増大率を表すパラメータである。 i と n は現在の解析ステップと総解析ステップ数である。以降の検討では全て $A = 1.0$ と設定した。図 2 (b)は、作用させた荷重値の履歴であり、時間増分はケース 1: $\Delta t = 1.0$ s とケース 2: $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ s の 2 ケースとし、総時間ステップ数は $n = 60$ ステップとした。材料物性では、一般的な鋼材を想定し、ヤング率が210 GPa、ポアソン比は0.3、質量密度は7800 kg/m³とした。任意の設計変数分布においても正しく感度を計算できるかを示すため、設計変数の分布は一様乱数によってランダムに与えた。

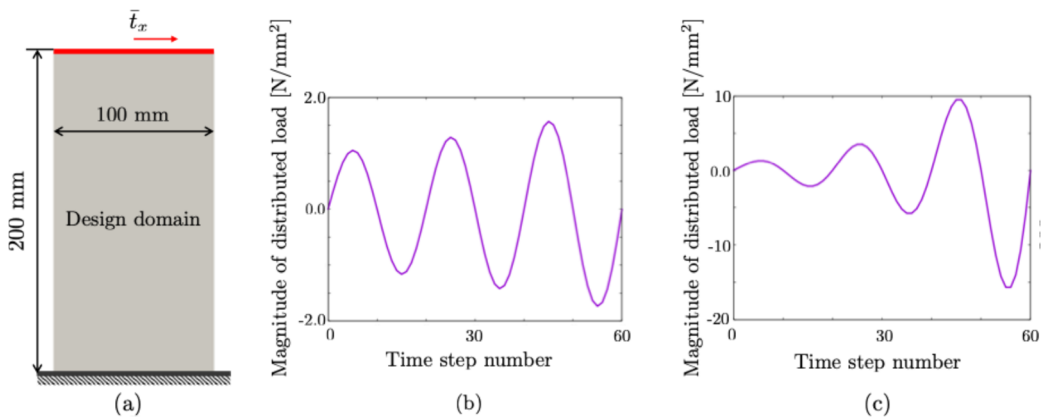


図 2 (a)解析モデル、(b)ケース 1 の作用荷重履歴、(c)ケース 2 の作用荷重履歴

自動微分と数値微分による目的関数の感度分布を図 3 と図 4 に示す。横軸は設計変数が

定義された要素番号、縦軸がその要素における感度の値である。図 3 と図 4 からわかるように、すべての要素において、両者は同じ感度分布となっている。これにより、自動微分によって正確な目的関数の感度が得られることを確認した。自動微分は、設計変数が多い問題においても現実的な時間で計算できるため、自動微分によって時刻歴応答問題かつ累積疲労損傷度を目的関数としたトポロジー最適化が可能である。なお、累積疲労損傷度を制約条件として考慮する場合も、トポロジー最適化では同じ感度を使用する。そのため、制約条件として考慮した場合にもそのまま自動微分を用いた感度解析を適用できる。また、荷重の周波数が低く、静的問題に近いケース 1 では、荷重の波形によらず同じ感度分布となった。一方、荷重の周波数が高いケース 2 では、慣性項の影響を含むため荷重の波形で異なる感度分布となった。これは、慣性項の影響が大きい条件では、波形の違いが最適化結果に影響を与えることを意味する。これは、時刻歴応答問題を考慮して初めて得られる結果である。

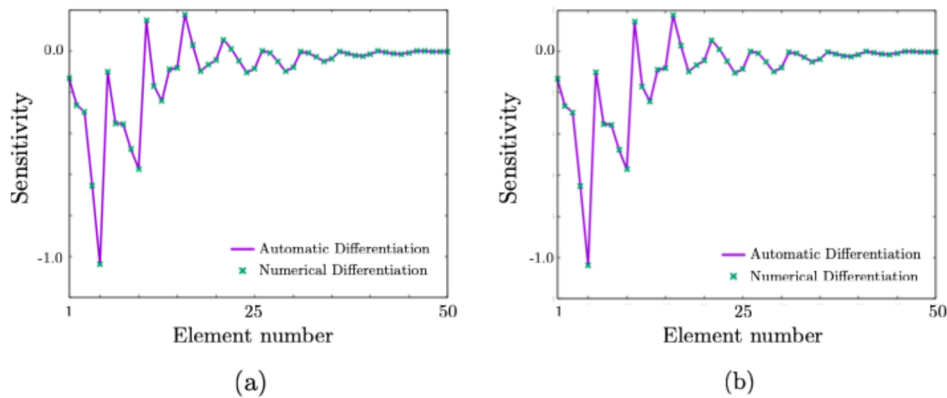


図 3 ケース 1: $\Delta t = 1.0$ s における

(a) $\alpha = 0.01$ と (b) $\alpha = 0.05$ の評価関数 f_1 の感度分布の比較結果

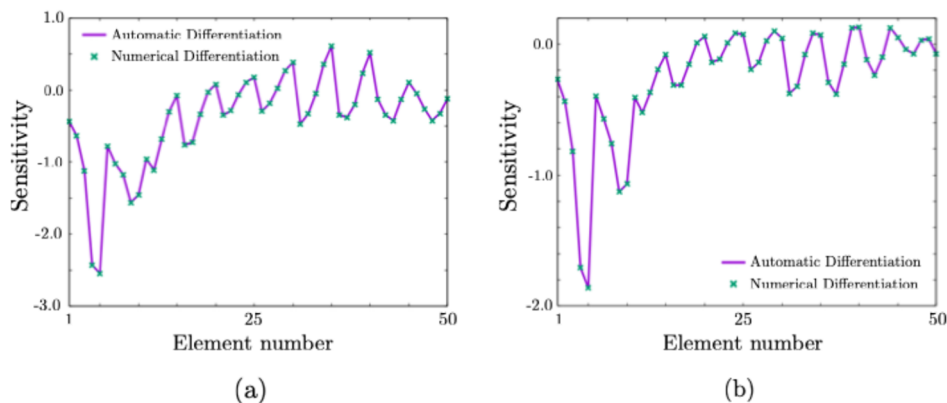


図 4 ケース 2: $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ s における

(a) $\alpha = 0.01$ と (b) $\alpha = 0.05$ の評価関数 f_1 の感度分布の比較結果

6. トポロジー最適化計算例

提案手法によって得られるトポロジー最適化結果の傾向を把握するため、2次元問題のトポロジー最適化計算例を示す。解析条件は図 5(a)の通りであり、5章の感度解析の精度検証とは、荷重の作用位置のみ変更し、中央部のみに作用させた。右向きを正とした繰り返し荷重を与えるものとし、その作用履歴は図 2(b)の波形で与えた。より細かい形状を表現するため、感度検証の条件に対し、要素分割数を $40 \times 80 = 3200$ 要素に増やした。作用させる荷重の周波数が最適化結果に与える影響を確認するため、総時間ステップ数は $n = 60$ ステップで固定し、時間刻みを、ケース 1: $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ とケース 2: $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ の2ケースを検討した。時間刻みが小さく、荷重の周波数が大きいほど、運動方程式の慣性力が大きくなり、時刻暦応答問題の影響が大きくなる。目的関数におけるグレースケールへのペナルティの重み w は 0.4 とした。また、初期構造として、全ての要素に対し一律に設計変数 $s_e = 0.4$ を与えた。感度解析は、提案する自動微分に基づく方法で計算し、最適化アルゴリズム GCMMA[7]によって設計変数を更新した。

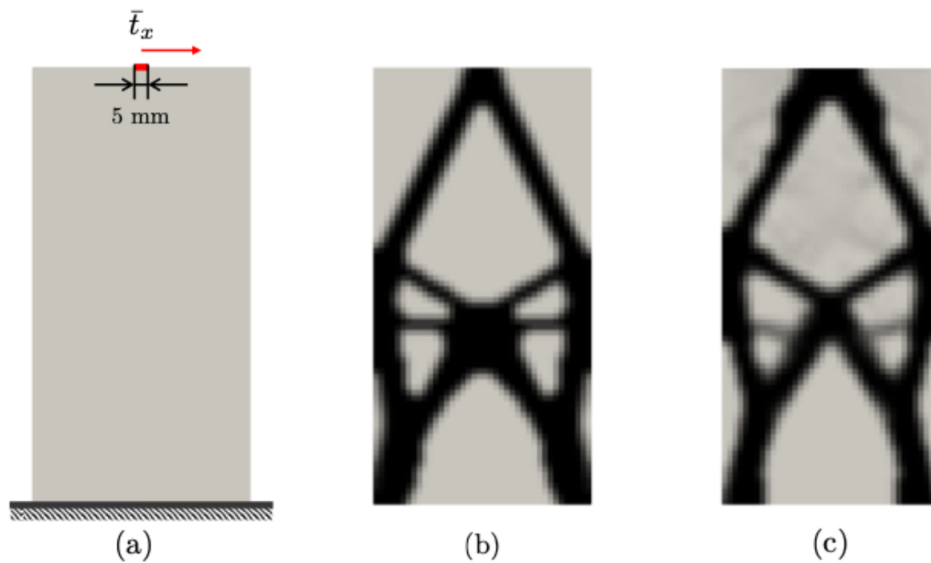


図 5 (a)解析モデル、(b)ケース 1 の最適化結果、(c)ケース 2 の最適化結果

トポロジー最適化結果を図 5(b)と(c)に示す。図 5(b)がケース 1 の時間刻み $\Delta t = 1.0 \text{ s}$ の結果、図 5(c)がケース 2 の時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ の結果である。2つの結果は異なる形状の最適化結果が得られた。特に静的問題に近い条件であるケース 1 では、変位を完全拘束している底面に多くの材料を配置している。底面部は最も高い応力が発生する部分であり、材料を多く配置することで応力低減を行なっていると考えられる。一方、過渡的な応答の影響が大きいケース 2 では、底面部に配置された材料が少ない。また、下部の部材はケース 1 より細く長いため剛性が低い構造となっている。剛性を低くすることで、先端

に作用する荷重をうまく受け流し、最も発生応力の高い底面部の応力を低減させる構造になったと言える。よって、荷重の周波数の高い過渡的な応答を考慮した場合、疲労強度を向上させる最適構造は静的問題を考慮した場合と大きく異なることが示された。

また、図 6 はトポロジー最適化の収束過程におけるケース 1 とケース 2 の正規化した累積疲労損傷度の評価関数 f_1 の履歴を示している。両方のケースに対し、最適化計算の進行に対して評価関数値が単調減少している。これは、正確に感度解析がなされ、適切な方向に最適化が進んだことを示している。提案手法により、体積制約化で累積疲労損傷度を最大化する構造が得られたと言える。

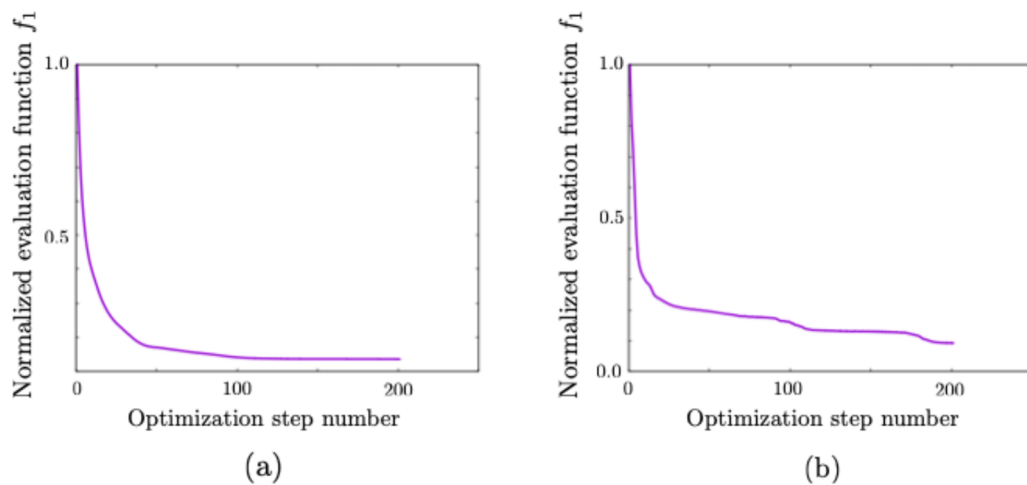


図 6 (a)ケース 1 と(b)ケース 2 における正規化された累積損傷度評価関数 f_1 の履歴

7. 結論

時刻暦応答問題を考慮した疲労強度最大化問題のトポロジー最適化を提案した。作用荷重の周波数が高く、慣性項の影響が大きい問題にも対応した。本研究の結果と今後の展望を以下に整理する。

- レインフロー法を用いた累積疲労損傷度を目的関数として採用した。従来は、von Mises 応力に対する応力低減を行う手法が一般的であったが、実設計で適用されている評価手法がトポロジー最適化で直接適用できるようになった。
- 時刻暦応答問題かつレインフロー法による累積疲労損傷度の感度解析において、自動微分を適用し、直接的な定式化が困難となる課題を解決した。さらに、感度の精度検証を行い、計算内容が複雑な目的関数について正確に感度が計算できることを示した。
- 2次元問題のトポロジー最適化に適用し、時刻暦応答問題特有の最適化結果が得られることを新たに示した。よって、機械構造物の設計では、想定される荷重の

周波数に応じた検討が必要なことを明らかにした。なお、時刻歴応答問題は、荷重の周波数が小さい場合、静的問題に帰着する。そのため、提案手法は、荷重の周波数から時刻歴応答の考慮が必要であるかによらず、任意の条件に適用できる汎用性がある。

- 計算条件によっては、最適化計算中の構造更新の振動やグレースケールが多く残るなどの不安定な挙動を示す場合を確認した。特にグレースケールは物理的に意味のない構造であり、確実にその除去を行える手法の導入が必要である。

謝辞

本研究は「公益財団法人 JFE21 世紀財団」2024 年度技術研究助成の支援を受けて実施されたものです。ここに記して厚く御礼申し上げます。

参考文献

1. J. D. Deaton, R. V. Grandhi, A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 49 (1) (2014) 1–38.
2. K. Nabaki, J. Shen, and X. Huang, Evolutionary topology optimization of continuum structures considering fatigue failure, *Materials and Design* 166 (2019) 107586.
3. S. Zhang, C. Le, A. L. Gain J. A. Norato, Fatigue-based topology optimization with non-proportional loads, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 345 (2019) pp. 805–825.
4. E. ASTM, 1049-85, Standard practices for cycle counting in fatigue analysis, *Annual book of ASTM standards*, Vol. 3, pp. 614–620.
5. 小川 竣, 山田 崇恭, 時刻歴応答問題のトポロジー最適化を用いた振動荷重による最大応力最小化, *日本計算工学会論文集*, Vol. 2021, (2021) 2021004.
6. W.S. Moses, V. Churavy, L. Paehler, J. Huckelheim, S. H. K. Narayanan, M. Schanen and J. Doerfert, Reverse-mode automatic differentiation and optimization of GPU kernels via enzyme, *SC'21: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, Vol. 61 (2021), pp. 1-16.
7. K. Svanberg, A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations, *SIAM Journal on Optimization*, 12 (2002), pp. 555-573.